В.А. Бубнов
Московский городской педагогический университет

Логические операции трехзначной логики

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

А Статья содержит описание альтернативного подхода к реализации цели Я. Лукасевича о ложке с более чем двумя значениями логических переменных, на базе элементарных арифметических операций в поле F_3.

Трехзначная логика Я. Лукасевича, созданная им в 1920 г., имела философскую мотивацию и была связанна с его идеей опровергнуть аристотелевскую доктрину логического фатализма, основанную на двузначной логике [1].

Аргумент логического фатализма был изобретен Аристотелем и его сущность состоит в следующем.

Предположим, что сейчас истинно, что завтра будет морское сражение. Из этого следует, что не может быть, чтобы завтра не было морского сражения. Следовательно, необходимо, что завтра морское сражение произойдет (**принцип необходимости**). Подобно этому, если сейчас ложно, что завтра будет морское сражение, то необходимо, что морское сражение завтра не произойдет. Но само высказывание о том, что завтра произойдет морское сражение представляется сейчас либо истинным, либо ложным (логический принцип двузначности). Следовательно, или необходимо, что морское сражение завтра произойдет, или необходимо, что морское сражение завтра не произойдет. После обобщения этого аргумента получаем, что все происходит по необходимости и нет ни случайных событий, ни свободы воли.

Лукасевич считает, что кроме истинных и ложных высказываний существуют возможные высказывания, к которым объективная возможность относится как нечто третье в добавление к существованию и несуществованию. Это позволяет установить систему трехзначной логики, в которой вводится третье истинное значение, промежуточное между **истинной** и **ложью** и интерпретируемое Лукасевичем как безразлично [1].

По поводу высказываний:

- завтра произойдет морское сражение,
- завтра не будет морского сражения,

рассмотренных Аристотелем, Лукасевич утверждает, что они касаются будущих случайных событий и, как таковые, эти высказывания не истинны и не ложны.

Предложив такую интерпретацию, Лукасевич заключает, что доводы Аристотеля подрывают не столько закон исключения третьего, сколько один из глубочайших принципов всей нашей логики, который им впервые установлен, а именно, что каждое высказывание **либо истинно, либо ложно**.

Этот принцип Лукасевич называет **принципом бивалентности**. Он не может быть доказан. Ему можно лишь доверять, а доверяет ему тот, по мнению Лукасевича, кому он кажется очевидным.

Именно поэтому Лукасевич отверг указанный принцип и заключил, что кроме истинности и ложности существуют еще другие логические значения, по крайней мере еще одно, третье логическое значение.

При построении трехзначной логики Лукасевич считал, что эта логика отличается от обычной двузначной в не меньшей степени, нежели системы неэвклидовой геометрии отличаются от эвклидовой геометрии [1].

При построении трехзначной логики возникают следующие проблемы:

- определение логических операций,
- их содержательная интерпретация,
- интерпретация истинностных значений.

В логике Лукасевича принимаются следующие истинностные значения: $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. В алгебре высказываний используются пять логических операций (логических связок) – дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквивалентность, отрицание.

Для определения указанных связок в трехзначной логике на множестве $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ Лукасевич оставляет классические значения для импликации ($\rightarrow$) и отрицания (–), когда аргументы принимают значения из множества $\{0, 1\}$. Применительно к аргументам из множества $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ эти связки Лукасевич доопределяет так:

$$(1 \rightarrow \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} \rightarrow 0) = \frac{1}{2},$$
$$(0 \rightarrow \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} \rightarrow 1) = 1,$$
$$\overline{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

В двузначной логике операции дизъюнкции, конъюнкции и эквивалентности выражаются через операции импликации и отрицания посредством следующих формул:

$$p \vee q = (p \rightarrow q) \rightarrow q,$$
$$p \cdot q = \overline{(\overline{p} \vee \overline{q})},$$
$$p \equiv q = (p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow p). \qquad (2)$$

Это позволило Лукасевичу с помощью формул (1) вначале определить таблицу операции дизъюнкции по первой из формул (2), а затем из последующих формул (2) таблицы логических связок конъюнкции и эквивалентности.

В результате истинностные таблицы для логических связок в трехзначной логике Лукасевича выглядят так:

p	$\overline{p}$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

“ • ”	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0

1 $\frac{1}{2}$ 0	1 1 1	$\frac{1}{2}$ 1 1	0 $\frac{1}{2}$ 1

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0
“≡”	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

В приведенных таблицах аргументы логической операции находятся в первом столбце и верхней строке, а их истинностное значение – на пересечении указанных столбца и строки.

Из изложенного очевидно, что формулы (1) в логике Лукасевича являются исходными при построении таблиц логических операций. Им Лукасевич не дал никакого обоснования и вполне очевидно, что они не являются единственно возможными при построении системы трехзначной логики.

Новую систему трехзначной логики будем строить исходя из следующих соображений.

В двузначной логике имеет место функциональная логическая операция **сложение по модулю два**, обозначаемая так: $\oplus$. Иногда ее называют операцией псевдо плюс. Эта логическая операции эквивалентна арифметическим операциям сложения и вычитания в одном разряде двоичной арифметики. В этой же логике операция **конъюнкция** соответствует одноразрядной операции умножения двоичной арифметики.

Не исключено, что указанные логические операции введены в логику из двоичной арифметики с целью создания логических машин, способных производить арифметические расчеты.

В двоичной логике также справедливы следующие формулы:

$$x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2,$$

(3) .

$$\overline{x} = x \oplus 1$$

(4)

Здесь x_1, x_2, x – логические переменные, принимающие значение из множества {0, 1}.

Если операции псевдо плюс и конъюнкция заданы, то на соотношения (3) и (4) можно смотреть, как на формулы, определяющие логические операции дизъюнкция и отрицание.

Изложенную схему определения логических операций дизъюнкции и отрицания сохраним в новой трехэлементной логике.

В отличие от логики Лукасевича в качестве истинностных значений возьмем множество чисел $\{0, 1, \tilde{1}\}$, где $\tilde{1}$ означает число минус единица. Это множество представляет основу троичной системы счисления.

В этой системе счисления, например, десятичное число N определяется через трехразрядное троичное число $a_2\, a_1\, a_0$ по формуле

$$N = a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3^1 + a_0 \ .$$

(5)

В таблице 1 приводится определенный перечень троичных трехразрядных чисел и их десятичных аналогов, вычисленных по (5).

Таблица 1

N	$a_2\, a_1\, a_0$	N	$a_2\, a_1\, a_0$
13	1 1 1	1	0 0 1
12	1 1 0	0	0 0 0
11	1 1 $\tilde{1}$	-1	0 0 $\tilde{1}$
10	1 0 1	-2	0 $\tilde{1}$ 1
9	1 0 0	-3	0 $\tilde{1}$ 0
8	1 0 $\tilde{1}$	-4	0 $\tilde{1}$ $\tilde{1}$
7	1 $\tilde{1}$ 1	-5	$\tilde{1}$ 1 1
6	1 $\tilde{1}$ 0	-6	$\tilde{1}$ 1 0
5	1 $\tilde{1}$ $\tilde{1}$	-7	$\tilde{1}$ 1 $\tilde{1}$
4	0 1 1	-8	$\tilde{1}$ 0 1
3	0 1 0	-9	$\tilde{1}$ 0 0
2	0 1 $\tilde{1}$	-10	$\tilde{1}$ 0 $\tilde{1}$

Правила троичной арифметики выводятся из условия, что результаты выполнения арифметических операций над троичными числами равны результатам выполнения тех же операций над их десятичными аналогами.

С помощью таблицы 1 можно получить следующие правила выполнения операций сложения и умножения в одном разряде над троичными числами.

$0 + 0 = 0$	$0 \times 0 = 0$
$0 + 1 = 1$	$0 \times 1 = 0$
$0 + \tilde{1} = \tilde{1}$	$0 \times \tilde{1} = 0$
$1 + 0 = 1$	$1 \times 0 = 0$
$1 + 1 = \tilde{1}$ (*)	$1 \times 1 = 1$
$1 + \tilde{1} = 0$	$1 \times \tilde{1} = \tilde{1}$
$\tilde{1} + 0 = \tilde{1}$	$\tilde{1} \times 0 = 0$

$$\tilde{1}+1=0 \qquad\qquad \tilde{1}\,\text{x}\,1=\tilde{1}$$
$$\tilde{1}+\tilde{1}=1\ \ (**) \qquad\qquad \tilde{1}\,\text{x}\,\tilde{1}=1$$

Здесь дополнительно обозначено: (*) – перенос 1 в старший разряд, (**) – перенос $\tilde{1}$ в старший разряд.

Данные правила позволяют ввести логическую операцию сложения по модулю три и конъюнкцию для трехзначной логики (см. таблицу 2). Операцию сложения по модулю три или псевдоплюс три будем обозначать так: $\overline{\oplus}$; а конъюнкцию точкой, которую часто будем опускать.

В таблице 2 столбец i определяет десятичный код набора переменных $x_1\, x_2$. Для определения операций дизъюнкции и отрицания в троичной логике постулируем справедливость формул (3) – (4) после замены в них операции $\oplus$ на $\overline{\oplus}$. Таким образом, для трехэлементной логики на множестве $\{0, 1, \tilde{1}\}$ будем иметь

$$x_1 \vee x_2 = x_1 \overline{\oplus}\, x_2 \overline{\oplus}\, x_1 x_2, \tag{6}$$

$$\overline{x} = x \,\overline{\oplus}\, 1. \tag{7}$$

Таблица 2

i	$x_1 x_2$	$x_1 \overline{\oplus} x_2$	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \to x_2$
4	1 1	$\tilde{1}$	1	0	$\tilde{1}$
3	1 0	1	0	1	$\tilde{1}$
2	1 $\tilde{1}$	0	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$
1	0 1	1	0	1	0
0	0 0	0	0	0	1
-1	0 $\tilde{1}$	$\tilde{1}$	0	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$
-2	$\tilde{1}$ 1	0	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$	1
-3	$\tilde{1}$ 0	$\tilde{1}$	0	$\tilde{1}$	0
-4	$\tilde{1}$ $\tilde{1}$	1	1	$\tilde{1}$	$\tilde{1}$
		$\boldsymbol{f_{-4162}}$	$\boldsymbol{f_{5824}}$	$\boldsymbol{f_{1662}}$	$\boldsymbol{f_{-9388}}$

Истинностные значения операции дизъюнкции, полученные по (6) представлены в таблице 2, а значения операции отрицания, вычисленные по (7), – в таблице 3.

Таблица 3

x	$\overline{x}$	$\overline{\overline{x}}$	$\overline{\overline{\overline{x}}}$
0	**1**	$\tilde{1}$	**0**
1	$\tilde{1}$	**0**	**1**
$\tilde{1}$	**0**	**1**	$\tilde{1}$

В двузначной логике операция отрицания функциональна и называется функцией не икс. Если в таблице 3 на столбец значений $\overline{x}$ смотреть сверху вниз, то получим троичный аналог десятичного числа шесть (см. таблицу 1). Поэтому операцию отрицания в троичной логике можно называть функцией f_6 , т. е. $\overline{x} = f_6$.

Для получения истинностной таблицы логических операции импликации сохраним имеющуюся в двузначной логике связь между импликацией и операциями дизъюнкции и отрицания. Эта связь определяется формулой

$$x_1 \to x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2 \quad (8)$$

Теперь, если использовать полученные правила для операций дизъюнкции и отрицания (см. таблицы 2 и 3), то по (8) можно получить таблицу операции импликации в трехзначной логике (см. таблицу 2).

Изложенная схема получения логических связок позволяет продолжить процесс обобщения двумерных логических функций классической логики на случай трехмерной логики.

В двоичной логике логические операции аналогичные операциям таблицы 2 называются логическими функциями от двух переменных $x_1\, x_2$. По аналогии с этим и в троичной логике операции, приведенные в таблице 2, можно называть логическими функциями от двух переменных. Если на столбцы значений этих функций смотреть сверху вниз, то каждый столбец представляет девятиразрядное троичное число, десятичный аналог которого определяется так:

$$N = a_8 \cdot 3^8 + a_7 \cdot 3^7 + a_6 \cdot 3^6 + a_5 \cdot 3^5 + a_4 \cdot 3^4 + a_3 \cdot 3^3 + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3^1 + a_0 \cdot 3^0 \quad (9)$$

Формула (9) позволяет получить следующие обозначения для рассмотренных логических функций:

– $\underset{-9388}{f}\,(x_1 x_2)$ – импликация;

– $\underset{-4162}{f}\,(x_1 x_2)$ – сложение по модулю 3;

– $\underset{1662}{f}\,(x_1 x_2)$ – дизъюнкция;

– $\underset{5824}{f}\,(x_1 x_2)$ – конъюнкция.

Очевидно, что число двумерных логических функций трехзначной логики равно числу девятиразрядных троичных чисел, т. е. велико. Напомним, что число двумерных логических функций двузначной логики равно шестнадцати.

Для графической иллюстрации логических функций трехзначной логики рассмотрим систему прямоугольных координат $x_1 o x_2$ на плоскости. Каждому набору $x_1\, x_2$ переменных из таблицы 2 на плоскости будет соответствовать точка. Всего таких точек будет девять, и они расположены друг от друга по направлениям осей координат на расстоянии, равном единице. Координаты указанных точек отметим десятичными числами, являющимися аналогами наборов переменных, представленных двухразрядными числами троичной системы счисления.

Выделенные точки плоскости пометим светлыми кружками, если на наборах, определяющих эти точки, логическая функция равна нулю. Точки плоскости, определяемые наборами переменных, на которых функция равна единице, отметим зачерненными кружками. И, наконец, точки, соответствующие значениям функции, равным единице с минусом, пометим кружками зачерненными наполовину.

Построенные таким образом графики функций дизъюнкции и импликации иллюстрируются рисунками 1 и 2.

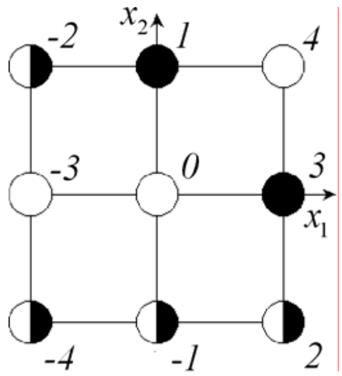

Рис. 1. График дизъюнкции

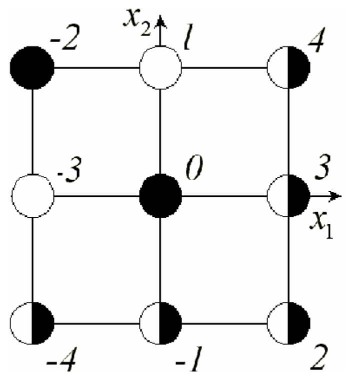

Рис. 2. График импликации

На этих рисунках все кружки соединены единичными отрезками, которые параллельны либо перпендикулярны координатным осям. По своей сути на указанных рисунках изображены математические конструкции, называемые трехцветными графами. Таким образом, теория многоцветных графов может быть полезна при анализе логических функций трехзначной логики.

По аналогии с булевой алгеброй на множестве $\{0, 1, \tilde{1}\}$ можно ввести новую алгебру B_3 с тремя операциями $(\vee, \cdot, -)$, истинностные таблицы которых даны в таблицах 2 и 3. Кроме того формулы (6) и (7) позволяют на этом же множестве ввести алгебру B_2 с двумя операциями $(\overline{\oplus}, \cdot)$, которая может быть аналогом алгебры Жегалкина для двузначной логики.

Таблицы 2 и 3 позволяют сформулировать следующие законы алгебры B_3.

1. Коммутативность.

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1,$$

$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1.$$

2. Ассоциативность.

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3),$$

$$x_1 x_2 x_3 = x_1 (x_2 x_3).$$

3. Отсутствие степеней только в случае нечетного числа сомножителей.

$$x\,x\,x = x; \quad \overline{x}\,\overline{x}\,\overline{x} = \overline{x}.$$

4. Отсутствие коэффициентов при нечетном числе слагаемых.

$$x \vee x \vee x = x; \overline{x} \vee \overline{x} \vee \overline{x} = \overline{x}.$$

5. Закон тройного отрицания (аналог закона двойного отрицания булевой алгебры).

$$\overline{\overline{\overline{x}}} = x\,.$$

6. Аналог закона исключения третьего аристотелевой логики.

$$x \vee \overline{x} \vee \overline{\overline{x}} = \tilde{1}\,.$$

7. Аналог закона непротиворечия классической логики.

$$x\,\overline{x}\,\overline{\overline{x}} = 0\,.$$

8. Справедливо следующее правило де Моргана:

$$\overline{x}_1\overline{x}_2 = \overline{x_1 \vee x_2}\ .$$

9. Операции с нулем и единицами:

$$x \vee 0 = x; \quad x \cdot 1 = x;$$

$$x \vee \tilde{1} = \tilde{1}; \quad x \cdot 0 = 0;$$

$$x \cdot \tilde{1} = \overline{\overline{x \vee 1}}.$$

В булевой алгебре значение переменной $x = 0$ отождествляется с понятием **ложно**, а $x = 1$ – с понятием **истинно**. Такое толкование нуля и единицы можно оставить и в трехэлементной алгебре.

Библиография

1. Карпенко А.С. Логика Лукасевича и простые числа. М.: Наука, 2000. 319 с.